

ANALISIS NUMERIK DALAM PENENTUAN KECEPATAN GERAK PENERJUN PAYUNG

Jimmy Lolowang

FMIPA, Universitas Negeri Manado

Email: jimmylolowang@unima.ac.id

Abstract

The mathematical model for paratrooper motion is formed based on Newton's Second Law where the change in momentum in a system is equal to the resultant force acting on it. This research is an experiment with analytical descriptive method, which aims to show which method is most effective for the root solution of the equation in determining the drag coefficient (c) of the parachutist's motion numerically using the graph method, the method for two, the false position method, the Newton- Raphson and the Secant method. Numerical analysis using Borland Delphi 7 program and data processing using Microsoft Excel program. The results showed that the graph method is only limited to determining the estimated value for the lower and upper limits that will be used in the method of the two-way method, the false position method, the Newton-Raphson method and the Secant method. It turns out that the Secant method is a more effective method in determining the drag coefficient (c) of the parachutist's motion, because there are only 4 iterations to obtain a c value of 16.8345.

Keywords : metode numerik akar persamaan, metode grafik, metode bagi dua, metode posisi palsu, metode newton-raphson, metode secant

PENDAHULUAN

Model matematika untuk gerak penerjun payung dibentuk berdasarkan Hukum II Newton, yaitu laju perubahan momentum pada suatu sistem adalah sama dengan resultan gaya yang bekerja padanya, biasanya dirumuskan dengan $\Sigma F = ma$, dimana m adalah massa penerjun, a adalah percepatan, dan F adalah resultan dari gaya yang bekerja pada penerjun payung. Model kasus ini diturunkan dari pernyataan percepatan sebagai perubahan kecepatan pada selang waktu (dv/dt), yaitu :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

dimana gaya (F) terdiri dari dua gaya berlawanan, yaitu yang cenderung ke bawah karena tarikan gravitasi F_D dan gaya tarik ke atas oleh resistansi udara F_U : sehingga $F = F_D + F_U$, jika gaya ke bawah ditandai positif, maka $F_D = mg$, dimana g = konstanta gravitasi dengan nilai pendekatan $9,8 \text{ m/s}^2$.

Resistansi udara bisa diformulasikan dengan bermacam variasi. Pendekatan sederhana adalah diasumsikan bahwa gaya ini berbanding linier dengan kecepatan, dan arahnya ke atas, sehingga $F_U = -cv$, dimana c = konstanta pembanding disebut koefisien tarik (kg/s). Dengan demikian persamaannya dapat dituli menjadi :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m}$$

atau disederhanakan menjadi

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

Yang merupakan persamaan diferensial, dimana solusi eksak untuk kecepatan jatuh penerjun tidak bisa ditentukan dengan manipulasi aljabar sederhana. Selebihnya, teknik yang lebih lanjut pada kalkulus harus digunakan untuk menentukan solusi analitik atau eksaknya.

Jika keadaan awal penerjun adalah diam ($v=0$)

pada $t=0$), maka persamaan gerak penerjun payung dapat ditulis menjadi:

$$v(t) = \frac{gm}{c} (1 - e^{-(c/m)t})$$

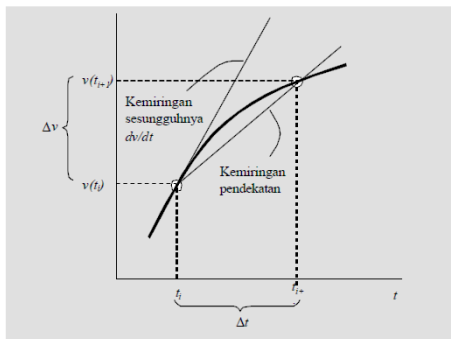
Persamaan ini dinamakan solusi analitik atau eksak karena secara eksak memenuhi persamaan diferensial biasa. Persamaan ini dapat diselesaikan secara metode numerik dengan mengurangnya dengan variabel v , sehingga diperoleh:

$$f(c) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right) - v$$

Harga c yang membuat $f(c) = 0$ merupakan akar persamaan. Harga c ini menyatakan koefisien hambat yang menjadi solusi persamaan dari kasus gerak penerjun payung.

Solusi komputasi numerik untuk kasus ini bisa diperoleh dengan memformulasikan kembali bentuk (dv/dt) sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$



Gambar 1. Grafik Penggunaan Diferensiasi $v-t$

Dimana Δv dan Δt = selisih dalam kecepatan dan waktu dihitung pada interval terbatas. $v(t_i)$ = kecepatan pada waktu awal t_i , dan $v(t_{i+1})$ = kecepatan setelah sekian waktu t_{i+1} . Catatan bahwa $dv/dt \cong \Delta v/\Delta t$ adalah pendekatan karena Δt terbatas. Lihat Gambar 1.

Dengan demikian bentuk numerik untuk gerak jatuh penerjun menjadi

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m} v(t_i)$$

dan dapat diubah menjadi

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i)\right] (t_{i+1} - t_i)$$

Penelitian ini merupakan penelitian eksperimen laboratorium dengan metode bersifat deskriptif analitik, yang bertujuan memperlihatkan metode mana yang paling efektif untuk solusi akar persamaan dalam menentukan koefisien hambat (c) dari gerak penerjun payung secara

numerik dengan metode grafik, metode bagi dua, metode posisi palsu, metode Newton-Raphson dan metode Secant.

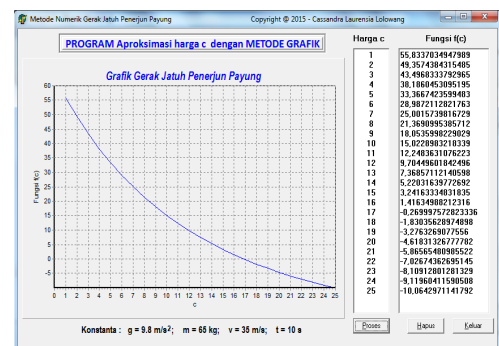
Penelitian ini telah berhasil menganalisis kecepatan gerak penerjun payung dengan metode numerik, yang meliputi metode grafik, metode tertutup : bagi dua dan posisi palsu, serta dengan metode terbuka : metode Newton-Raphson dan Secant. Untuk analisis numerik menggunakan program Borland Delphi 7, sedangkan untuk pengolahan data menggunakan Program Microsoft Excel.

Hasil analisis numerik dengan program Delphi telah diperoleh deskripsi harga c untuk gerak jatuh penerjun payung. Untuk menentukan koefisien hambat c dari gerak jatuh penerjun payung menggunakan persamaan:

$$f(c) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right) - v,$$

dengan harga-harga: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, massa $m = 65 \text{ kg}$, kecepatan $v = 35 \text{ m/s}$, dan waktu $t = 10 \text{ s}$.

a. Hasil analisis metode numerik grafik



Dari grafik di atas diperoleh aproksimasi harga c dari gerak Penerjun Payung. Pada gambar terlihat perubahan tanda dari positif ke negatif berada di angka 16 dan 17. Dengan demikian harga koefisien hambat c diperkirakan di antara 16 dan 17.

b. Hasil analisis metode numerik bagi dua

i	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1) * f(x_2)$	$f(x_1) - f(x_2)$
1	15,00000	18,00000	3,241633	0,556652	-1,830356	1,804661
2	15,00000	17,25000	0,556652	-0,671424	-0,373748	0,271424
3	15,00000	16,87500	0,556652	-0,065346	-0,036352	0,062302
4	15,00000	16,83750	0,556652	0,242072	0,135919	0,019195
5	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
6	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
7	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
8	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
9	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
10	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
11	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
12	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
13	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
14	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
15	15,00000	16,83125	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000

Dengan melihat hasil analisis pada metode grafik, maka batas bawah $X_L = 15$ dan batas atas $X_U = 18$.

Dari program Delphi yang telah dibuat, dengan memasukkan batas bawah ($X_L = 15$) dan batas atas ($X_U = 18$) ternyata memerlukan iterasi sebanyak 15 kali untuk mendapatkan koefisien harga c sebesar 16,8345.

Tabel analisis kesalahan aproksimasi harga c dengan metode bagi dua

I	Akar (x_r)	$ e_a \%$
1	16,5	
2	17,25	4,348%
3	16,875	2,222%
4	16,6875	1,124%
5	16,78125	0,559%
6	16,828125	0,279%
7	16,8515625	0,139%
8	16,83984375	0,070%
9	16,83398438	0,035%
10	16,83691406	0,017%
11	16,83544922	0,009%
12	16,83471168	0,004%
13	16,83435059	0,002%
14	16,83453369	0,001%
15	16,83462524	0,001%

Dari tabel di atas terlihat kesalahan relatif e_a berkurang sampai di bawah 0,05% dari iterasi kedua $e_a = 4,348\%$ sampai iterasi ke delapan $e_a = 0,070\%$.

c. Hasil analisis metode numerik Posisi Palsu

i	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1) - f(x_2)$	$ f(x_1) $
1	15,00000	18,00000	3,241633	0,556652	-1,830356	1,804661
2	15,00000	16,8404	0,556652	-0,671424	-0,373748	0,271424
3	15,00000	16,835	0,556652	-0,065346	-0,036352	0,062302
4	15,00000	16,8346	0,556652	0,242072	0,135919	0,019195
5	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
6	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
7	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
8	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
9	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
10	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
11	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
12	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
13	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000
14	15,00000	16,8345	0,556652	0,007598	0,004254	0,000000

Dari gambar di atas dengan ($X_L = 15$) dan batas atas ($X_U = 18$) ternyata memerlukan iterasi sebanyak 14 kali untuk mendapatkan koefisien harga c sebesar 16,8345.

Tabel analisis kesalahan aproksimasi harga c dengan metode posisi palsu

I	Akar (x_r)	$ e_a \%$
1	16,9174	
2	16,8404	0,457%
3	16,835	0,032%
4	16,8346	0,002%
5	16,8345	0,000%
6	16,8345	0,0000%
7	16,8345	0,0000%
8	16,8345	0,0000%
9	16,8345	0,0000%
10	16,8345	0,0000%
11	16,8345	0,0000%
12	16,8345	0,0000%
13	16,8345	0,0000%
14	16,8345	0,0000%

Dari tabel di atas terlihat kesalahan relatif e_a berkurang sampai di bawah 0,05% hanya sampai pada iterasi kedua, $e_a = 0,457\%$.

d. Hasil analisis metode numerik Posisi Palsu

i	fx	dx	[Yn]
1	3,24163	-2,96379	15,0000000
2	1,25642	-2,53319	16,09153503
3	0,40962	-2,36794	16,58751774
4	0,12194	-2,31438	16,76050253
5	0,03509	-2,29845	16,81319103
6	0,00999	-2,29387	16,82845695
7	0,00284	-2,29256	16,83281195
8	0,00080	-2,29219	16,83404871
9	0,00023	-2,29209	16,83439948
10	0,00006	-2,29206	16,83449893
11	0,00002	-2,29205	16,83452713

Dari gambar di atas, dengan titik awal ($X_0 = 15$) ternyata memerlukan iterasi sebanyak 11 kali untuk mendapatkan koefisien harga c sebesar 16,8345.

Tabel analisis kesalahan aproksimasi harga c dengan metode Newton Raphson

i	Akar (x_r)	$ e_a \%$
1	15	
2	16,09153503	6,78329%
3	16,58751774	2,99010%
4	16,76050253	1,03210%
5	16,81319103	0,31338%
6	16,82845695	0,09071%
7	16,83281195	0,02587%
8	16,83404871	0,00735%
9	16,83439948	0,00208%
10	16,83449893	0,00059%
11	16,83452713	0,00017%

Dari tabel di atas, terlihat kesalahan relatif e_a berkurang sampai di bawah 0,05% hanya sampai pada iterasi keenam, $e_a = 0,091\%$.

e. Hasil analisis metode numerik Secant

i	X_0	X_1	X_2	$f(X_0)$	$f(X_1)$	$f(X_2)$
1	15,000000	18,000000	16,917374	3,241631	-1,830056	0,135804
2	16,000000	16,917374	16,830749	-1,830056	-0,156804	0,006225
3	16,917374	16,830749	16,834551	-0,156804	0,006225	0,000023
4	16,830749	16,834551	16,834538	0,006225	0,000023	0,000000

Dengan menggunakan hasil metode grafik, maka titik awal ($X_1 = 15$) dan titik akhir ($X_2 = 18$), ternyata memerlukan iterasi sebanyak 4 kali untuk mendapatkan koefisien harga c sebesar 16,8345.

Tabel analisis kesalahan aproksimasi harga c dengan metode secant

i	Akar (x_r)	$ e_a \%$
1	16,9173738	6,399%
2	16,83074861	0,515%
3	16,83455051	0,023%
4	16,83453828	0,0001%

Dari tabel di atas, terlihat kesalahan relatif e_a berkurang sampai di bawah 0,05% hanya sampai pada iterasi kedua $e_a = 0,515\%$.

Berdasarkan analisis di atas dapat disimpulkan bahwa: metode grafik terbatas penggunaannya untuk menentukan taksiran nilai untuk batas bawah dan batas atas yang akan dipakai pada metode-metode lainnya. Sedangkan metode Secant merupakan metode yang lebih efektif dalam menentukan koefisien hambat (c) gerak penerjun payung, karena hanya 4 iterasi saja untuk memperoleh nilai c sebesar 16,8345.

REFERENSI

- Chapra, S. C. dan Canale, R. P. (1996). Metode Numerik, Erlangga : Jakarta.
- Nugroho, F. (2013). Pemrograman dan Metode Numerik (Untuk Fisika), diambil dari https://www.academia.edu/8847127/Pemrograman_dan_Metode_Numerik_Untuk_Fisika_Contents diakses 15/06/2015 pukul 02:42 WITA.
- Riko, J. H. Metode Numerik (Interpolasi Linear, Metode Secant, Metode Iterasi, Metode Newthton-Rapshon), diambil dari http://www.academia.edu/9563756/Metode_Numerik_Interpolasi_Linear_Metode_Secant_Metode_Iterasi_Metode_Newthton-Rapshon
- Subakti, I. (2006). Metode Numerik, Jurusan Teknik Informatika Institut Teknologi Sepuluh November : Surabaya, diambil dari http://www.academia.edu/3185302/Metode_Numerik diakses 20/07/2014 pukul 13:47 WITA.
- Triatmojo, Bambang. (1992). Metode Numerik, Peta Offset : Yogyakarta.